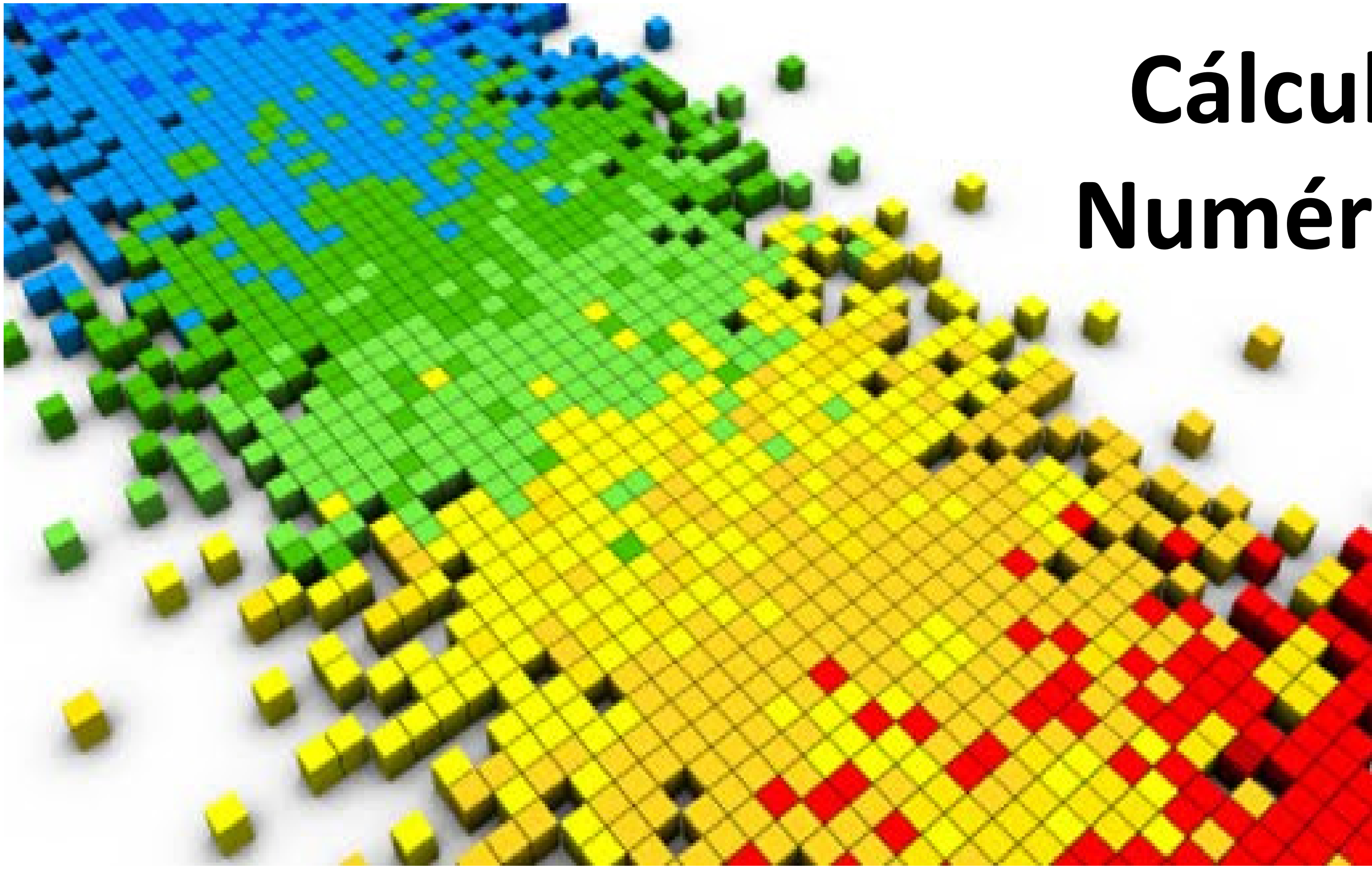

Cálculo Numérico

Aula 3 – Arredondamento e Operações

2014.1 - 08/04/2014

Prof. Guilherme Amorim

gbca@cin.ufpe.br

UFPE

Centro de Informática U·F·P·E

Pergunta...

- Já sabemos que alguns números reais podem ser representados numa máquina...
- Outros não.
- Numa máquina com 4 dígitos significativos...
  - O número real 34,21 se torna $3{,}421 \times 10^{1}$
- Já o número real 0,42162 não é um número desta máquina
  - O que podemos fazer para representar esse e outros números numa máquina?

Arredondamento

Definição 1.3: Seja $\mathsf{F}\ (b, t, e_1, e_2)$ um sistema de ponto flutuante. Uma função

$$\mathsf{O} : \Re \rightarrow \mathsf{F}$$
$$x \rightarrow \mathsf{O}\, x = \bar{x},$$ é chamada um arredondamento se:

1) $\mathsf{O}\, x = \bar{x} = x$, se $x \in \mathsf{F}$;

2) Se $x \leq y$ então $\mathsf{O}\, x = \bar{x} \leq \mathsf{O}\, y = \bar{y}$;

3) Se $x \notin \mathsf{F}$ então entre x e $\mathsf{O}\, x = \bar{x}$ não existem elementos de F.

Qual o procedimento de arredondamento?

- Se o número desejado for um número da máquina, não há problema algum, pois seu valor será representado por si próprio.
- Noutro caso, ele estará entre dois números de máquina consecutivos.
  - Utiliza-se o número de máquina mais próximo para representar tal resultado.
  - Caso os dois valores possíveis de serem usados na representação desse tal resultado sejam igualmente próximos, será escolhido aquele cujo significando terminar em um dígito par.

E qual o erro cometido nesse arredondamento?

- Se x for um elemento da máquina
  - $|x - \bar{x}| = 0$
  - Ou seja, o erro é zero.
- Se x não for um elemento da máquina
  - $|x - \bar{x}| \leq \frac{1}{2} b^{(e-t+1)}$

Lembrar que...

- Fixado o expoente e, dois números consecutivos de uma máquina qualquer $\boldsymbol{x_1 = m_1 \times b^e}$ e $\boldsymbol{x_2 = m_2 \times b^e}$, $\boldsymbol{x_1 < x_2}$, se diferenciam por: $\boldsymbol{b^{(e-t+1)}}$
- Demonstração

$$
\begin{aligned}
x_2 - x_1 &= m_2 . b^e - m_1 . b^e \\
&= (m_2 - m_1) . b^e \\
&= 0,000\ldots01 . b^e \\
&= (1 . b^{-(t-1)}) . b^e \\
&= b^{e-t+1}
\end{aligned}
$$

Exemplos

a) $\boldsymbol{x} = 3{,}4721 \times 10^{0}$ é arredondado para (representado por) ele mesmo, já que são exatamente cinco os seus dígitos significativos.

b) $\boldsymbol{x} = 3{,}47213 \times 10^{0}$ é arredondado para (representado por) $\bar{\boldsymbol{x}} = 3{,}4721 \times 10^{0}$, uma vez que ele se encontra entre $\boldsymbol{x}_1 = 3{,}4721 \times 10^{0}$ e $\boldsymbol{x}_2 = 3{,}4722 \times 10^{0}$ sendo o primeiro o mais próximo dele.

c) $\boldsymbol{x} = 3{,}47216 \times 10^{0}$ é arredondado para (representado por) $\bar{\boldsymbol{x}} = 3{,}4722 \times 10^{0}$, neste caso ele também se encontra entre $\boldsymbol{x}_1 = 3{,}4721 \times 10^{0}$ e $\boldsymbol{x}_2 = 3{,}4722 \times 10^{0}$ porém o mais próximo dele é o segundo.

d) $\boldsymbol{x} = 3{,}47215 \times 10^{0}$ é representado por $\bar{\boldsymbol{x}} = 3{,}4722 \times 10^{0}$.

Casos especiais

- O que acontece quando tentamos representar o número 1.000.000 num sistema F (10, 6, -5, 5)?
- Qual o valor x_{max} para esta máquina?
  - $9{,}99999 \times 10^5$
- Logo, como representar 1.000.000?
- Não é possível representar.

Overflow

Overflow: Ocorre quando o resultado da operação de elementos de um máquina pertence a $(-\infty, -\boldsymbol{x}_{\text{máx}}) \cup (\boldsymbol{x}_{\text{máx}}, +\infty)$. Neste caso, o valor $\bar{x}$ não pode ser representado nessa máquina. Ou seja, o valor a ser representado ultrapassa o maior (menor) valor que a máquina consegue representar.

Underflow

Underflow: Ocorre quando o resultado da operação de elementos de um máquina pertence a $(- \boldsymbol{x}_{\min} , 0) \cup (0 , \boldsymbol{x}_{\min})$. Aqui, o valor que se deseja representar é inferior ao menor elemento positivo e o maior negativo, sem ser o zero, que a máquina é capaz de representar. Logo, $\bar{\boldsymbol{x}}$ não tem representação nessa máquina.

Visualmente (Overflow e Underflow)

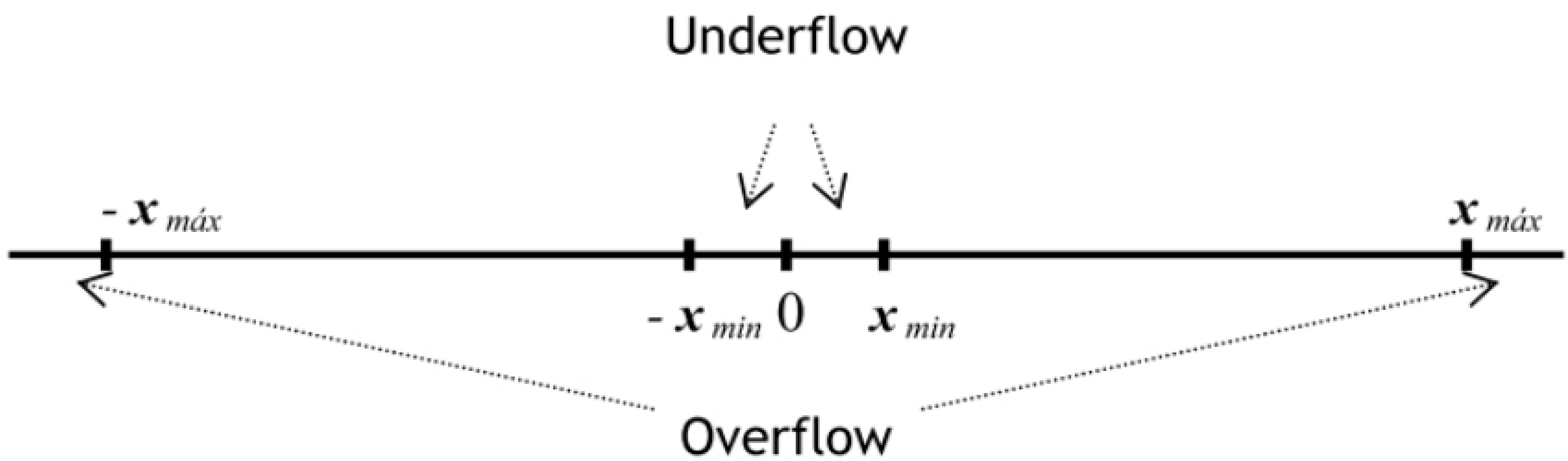

Figura 1.1. Regiões de *underflow* e *overflow*.

Operações Aritméticas

- Exemplo de adição...
- Como vocês resolveriam este problema?
  - Seja o sistema de ponto flutuante F(10, 5, -9, 9)
  - $x_1 = 1{,}6234 \times 10^2$
  - $x_2 = 1{,}2246 \times 10^1$
  - Calcule $x_1 + x_2$

$$\begin{array}{rl} & 1{,}6234 \times 10^2 \\ + & 0{,}12246 \times 10^2 \\ \hline & 1{,}7458\underline{6} \times 10^2 \end{array}$$

Logo, $\mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_2 = \mathbf{1{,}7459 \times 10^2}$

Qual o procedimento da adição?

- Verificar se $c_1 = c_2$
  - Igualar os expoentes, se necessário.
- Somar os significandos m_1 e m_2
- Normalizar
- Arredondar

Como poderíamos descrever o algoritmo?

- Suponha F (b, t, e_1, e_2)
- $x_1 = m_1 \times b^{c_1}$
- $x_2 = m_2 \times b^{c_2}$

1. Se $c_1 \neq c_2$; *(igualar os expoentes)*
    faça
        Se $c_1 < c_2$;
            faça
                $m_1 = m_1 \times b^{c_1 - c_2}$;
                $c = c_2$;
            fim ;
        Senão;
            faça
                $m_2 = m_2 \times b^{c_2 - c_1}$;
                $c = c_1$;

Algoritmo da adição

2. $\mathrm{m} = m_1 + m_2$;

3. Se $|\mathrm{m}| \geq \mathrm{b}$; *(normalizar)*

faça

$\mathrm{m} = \mathrm{m} \times \mathrm{b}^{-1}$;

$\mathrm{c} = \mathrm{c} + 1$;

Se $\mathrm{c} > \mathrm{e}_2$

***"overflow"*;**

Pare.

fim

4. Se $|\mathrm{m}| < 1$; *(normalizar)*

enquanto $|\mathrm{m}| < 1$;

faça

$\mathrm{m} = \mathrm{m} \times \mathrm{b}$;

$\mathrm{c} = \mathrm{c} - 1$;

Se $\mathrm{c} < \mathrm{e}_1$

"underflow";

Pare.

fim;

5. $\mathrm{m} = \mathrm{O}(\mathrm{m})$; *(arredondar)*

$x = \mathrm{m} \times \mathrm{b}^{\mathrm{c}}$;

Pare.

6. Fim.

Como seria o da subtração?

- Idêntico ao da adição, pois
- $x_1 - x_2 = x_1 + (-x_2)$

Multiplicação

<u>**Multiplicação**</u> Esta é definida como

$$\times : F \times F \rightarrow F$$

$$(x_1,\ x_2) \rightarrow x = x_1 \times x_2 = m_1 \times m_2 \times b^{c_1 + c_2}$$

Multiplicação - Exemplo

Exemplo 1.10 - Considerando o sistema de ponto flutuante F $(10, 5, -9, 9)$ e $x_1 = 5{,}4732 \times 10^{2}$, $x_2 = 2{,}1314 \times 10^{0}$, calcule $x_1 \times x_2$.

SOLUÇÃO: Como está definida, a máquina multiplica os significandos e adiciona os expoentes para em seguida o resultado ser normalizado e arredondado, se necessário.

Logo, $x_1 \times x_2 = 5{,}4732 \times 2{,}1314 \times 10^{2+0} = 11{,}66557848 \times 10^2 =$
$= 1{,}166\underline{5}57848 \times 10^3$ Daí, $x_1 \times x_2 = \mathbf{1{,}1666 \times 10^{3}}$.

Divisão

Divisão Sua definição vem a ser

$$/ : \mathsf{F} \times \mathsf{F} \rightarrow \mathsf{F}$$

$$(\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2) \rightarrow \boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}_1 / \boldsymbol{x}_2 = (\boldsymbol{m}_1 / \boldsymbol{m}_2) \times \boldsymbol{b}^{c_1 - c_2}, \quad \boldsymbol{x}_2 \neq 0.$$

Divisão – Exemplo

Exemplo 1.11 - Seja o sistema de ponto flutuante F $(10, 4, -9, 9)$ e $x_1 = 5{,}590 \times 10^{2}$, $x_2 = 5{,}554 \times 10^{-3}$. Calcule x_1 / x_2 nessa máquina.

SOLUÇÃO: Seguindo a definição temos

$$x_1 / x_2 = (5{,}590 / 5{,}554) \times 10^{2-(-3)} = 1{,}006\underline{\mathbf{4}}\mathbf{81814908} \times 10^{5} =$$

$$= \mathbf{1{,}006 \times 10^{5}}\,.$$

Inverso Multiplicativo

<u>**Inverso multiplicativo**</u> Dado $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{m} \times \boldsymbol{b}^{\mathrm{c}} \neq 0$, seu inverso multiplicativo vem a ser $\boldsymbol{y} \in \mathsf{F}$ tal que $\boldsymbol{x} \times \boldsymbol{y}$ está mais próximo de 1 do que $\boldsymbol{x} \times \boldsymbol{z}$, $\boldsymbol{z}$ outro elemento qualquer de F. Normalmente $\boldsymbol{y}$ é denotado por $\boldsymbol{x}^{-1}$ (pseudo inverso).

Inverso Multiplicativo – Exemplo

- Questão 11-g do livro – V ou F?

g) Considere a máquina **B** do item anterior e o número $x = 73$. Logo, podemos afirmar que $(x^{-1})^{-1} = x$.

$$x = 73 = 73 \times 10^{0} = 7{,}300 \times 10^{1}$$

$$x^{-1} = \frac{1{,}000 \times 10^{0}}{7{,}300 \times 10^{1}} = 0{,}13698 \times 10^{-1} = 1{,}370 \times 10^{-2}$$

$$(x^{-1})^{-1} = \frac{1{,}000 \times 10^{0}}{1{,}370 \times 10^{-2}} = 0{,}72992 \times 10^{2} = 7{,}299 \times 10^{1}$$

Logo $x \neq (x^{-1})^{-1}$

Exercícios

1 - Para uma máquina que trabalha na base 10, com 6 dígitos no significando normalizado e o expoente variando de - 99 a 99, ou seja F *(10, 6, - 99, 99)* indique:

a) Quantos são os significandos normalizados para um dado expoente;

b) Quantos são os expoentes;

c) Quantos números têm representação nessa máquina;

d) Qual o maior número aceitável;

e) Qual o menor número positivo aceitável;

f) Qual a maior e a menor distância (*"gap"*), entre dois numeros consecutivos;

g) Quais as regiões de Underflow e Overflow;

h) Qual a representação interna de $527{,}4665 \times 10^{-3}$;

i) Exemplos nas operações de adição, subtração, etc., cujos resultados apresentam problemas de Underflow e/ou Overflow.

Exercícios

3 - Representе na reta real todos os números do sistema F $(2, 3, -1, 2)$, indicando inclusive as regiões de Underflow e de Overflow.

4 - Existe um sistema de ponto flutuante com $e_1 = -2$, $e_2 = 5$, $t = 2$ e que possua 37 elementos? Justifique.

5 - Verifique o que ocorre em sua calculadora nos seguintes casos: (Justifique)

a) $10^{30} \times 10^{80}$; **b)** $10^{-40} \times 10^{-80}$; **c)** $25^{4} - 25^{-4}$.

6 - Considere a máquina F $(10, 5, -9, 9)$. Nela, verifique se $(a+b)+c = a+(b+c)$, onde $a = 32{,}424$; $b = 4{,}2131$; $c = 0{,}000382$.

Exercícios

8 - Considere um computador hipotético que trabalha na base 10, com 5 dígitos no significando e 2 dígitos no expoente, denotado por F *(10, 5, -99, 99)*. Nele, calcule o valor de

$$S = \sum_{i=1}^{5} \frac{1}{i^{i}} \quad , \text{ de duas formas:}$$

a) Da maior parcela para a menor;

b) Da menor parcela para a maior;

c) O que dizer *(Alguma propriedade dos números reais não foi verificada? Dos dois resultados, qual o mais próximo do verdadeiro? Etc.)* diante dos resultados dos itens anteriores?

Exercícios

- Mais exercícios no livro. Capítulo 1.

Bibliografia